算分第七次作业参考答案与评分标准

答案仅供参考，合理即给分

7.4 设 N 是简单容量网络，f 是 N 上的 0-1 可行流，证明 N（f）也是简单容量网络

20%　（证明 N(f) 所有边容量为 1：7%，证明入度为 1 的点：7%，出度为 1 的点：6%，每处错误扣 2%）

7.4　设 $N=\langle V,E,c,s,t\rangle$，$N(f)=\langle V,E(f),ac,s,t\rangle$，其中

$$E(f)=E^+(f)\cup E^-(f)$$

$$E^+(f)=\{\langle i,j\rangle \mid \langle i,j\rangle\in E\wedge f(i,j)=0\}$$

$$E^-(f)=\{\langle i,j\rangle \mid \langle j,i\rangle\in E\wedge f(j,i)=1\}$$

对于 $\forall\langle i,j\rangle\in E(f)$，若 $\langle i,j\rangle\in E^+(f)$，则 $f(i,j)=0$，$ac(i,j)=c(i,j)-f(i,j)=1$；若 $\langle i,j\rangle\in E^-(f)$，则 $ac(i,j)=f(j,i)=1$. 得证 $N(f)$ 所有边的容量为 1.

对于 $\forall i\in V-\{s,t\}$，如果 i 在 N 中的入度为 1，设 $\langle p,i\rangle,\langle i,q_1\rangle,\cdots,\langle i,q_r\rangle\in E$，有以下两种可能：

(1) $f(p,i)=1$，则 $f(i,q_1),\cdots,f(i,q_r)$ 中有一个等于 1，其余都等于 0. 不妨设，$f(i,q_1)=1$，$f(i,q_2)=\cdots=f(i,q_r)=0$. 于是，$\langle q_1,i\rangle,\langle i,p\rangle,\langle i,q_2\rangle,\cdots,\langle i,q_r\rangle\in E$，$i$ 在 $N(f)$ 中的入度为 1.

(2) $f(p,i)=0$，则 $f(i,q_1),\cdots,f(i,q_r)$ 全等于 0. 于是，$\langle p,i\rangle,\langle i,q_1\rangle,\cdots,\langle i,q_r\rangle\in E$，$i$ 在 $N(f)$ 中的入度也为 1.

类似可证，如果 i 在 N 中的出度为 1，则 i 在 $N(f)$ 中的出度也为 1. 得证 $N(f)$ 是简单容量网络.

7.7

20%（拆点思路正确 10%，新构造网络的定义：点集 3%，边集 3%，边容量限制 4%）

7.7　将求带顶点容量的容量网络的最大流问题转化为标准的最大流问题. 带顶点容量的容量网络 $N=\langle V,E,c,s,t\rangle$，其中 $c:E\cup(V-\{s,t\})\to R^*$，即不但每一条边 e 有容量限制 $c(e)$，而且对通过每个中间点的流量也有限制：$\forall u\in V-\{s,t\}$，$\sum\limits_{\langle v,u\rangle\in E} f(v,u)\leqslant c(u)$.

7.7　把每一个中间顶点 v 替换成两个顶点 $v(1)$，$v(2)$ 和一条边 $\langle v(1),v(2)\rangle$，$c(v(1),v(2))=c(v)$. 每一条边 $\langle u,v\rangle$ 替换成 $\langle u(2),v(1)\rangle$，$c(u(2),v(1))=c(u,v)$. 这里约定，$s(1)=s(2)=s$，$t(1)=t(2)=t$. 即如下构造容量网络 $N'=\langle V',E',c',s,t\rangle$，其中：

$$V'=\{s,t\}\cup\{v(1),v(2)\mid v\in V-\{s,t\}\}$$

$$E'=\{\langle u(2),v(1)\rangle \mid \langle u,v\rangle\in E\}\cup\{\langle v(1),v(2)\rangle \mid v\in V-\{s,t\}\}$$

$$c'(e)=\begin{cases}c(u,v), & e=\langle u(2),v(1)\rangle,\\ c(v), & e=\langle v(1),v(2)\rangle,\end{cases}\quad \forall e\in E'$$

不难把 N 上的可行流转换成 N' 上的可行流，且其流量相同，反之亦然.

7.17

20%（第一问 10%，第二问 10%，说清算法过程，能够正确求解即可）

7.17 给定容量-费用网络，如何求下述最大流：

(1) 最小费用最大流.

(2) 费用不超过给定值的最大流.

7.17 (1) 方法一：在算法 7.4 最小费用流的负回路算法中，把步骤 1 改为调用最大流算法，求得最大流 f.

方法二：在算法 7.5 最小费用流的最短路算法中，删去流量调整的上界 v.

算法如下：

1. $f \leftarrow 0$
2. 构造 $N(f)$
3. 调用 Ford 算法计算 $N(f)$中以 aw 为权的 s-t 最短路径
4. if $N(f)$中不存在 s-t 路径 then return f //f 是最小费用最大流
5. 设求得的最短路径为 P，$\theta \leftarrow \min\{ac(i,j) \mid \langle i,j\rangle \in E(P)\}$
6. for $\langle i,j\rangle \in E(P)$ do
7.   if $\langle i,j\rangle \in E$ then $f(i,j) \leftarrow f(i,j)+\theta$
8.   else $f(j,i) \leftarrow f(j,i)-\theta$
9. goto 2

(2) 方法一：利用算法 7.4 最小费用流的负回路算法求解，对算法进行两点修改.

① 求一个最大流作为初始流.

② 设给定费用 w_0. 当 $w(f) \leqslant w_0$ 时，计算结束. 如果 $N(f)$中没有以 aw 为权的负回路且 $w(f) > w_0$，则不存在费用不超过 w_0 的最大流.

方法二：如本题(1)中方法二，用最短路径算法求得最小费用最大流 f. 如果 $w(f) \leqslant w_0$，则 f 是费用不超过 w_0 的最大流，输出 f；如果 $w(f) > w_0$，则不存在费用不超过 w_0 的最大流.

7.21

20%（构建的网络符合题意，网络边和节点连接正确 10%，边容量和费用标注正确 10%，每处错误扣 2%，扣完为止）

7.21 某企业和用户签订了为期一年的合同，合同规定每季度末交货. 表 7.3 列出企业每季度的生产能力、交货量以及生产成本. 每台设备每季度的库存费 0.1 万元. 试制订生产计划使得总成本最低.

表 7.3

季度	生产能力/台	交货量/台	生产成本/(万元/台)
1	25	15	12.0
2	35	20	11.0
3	30	25	11.5
4	20	20	12.5

7.21 （1）每个季度是一个发点、同时又是一个收点，这是一个多发点、多收点的最小费用流问题. 引入一个超级发点和一个超级收点，问题转化为最小费用最大流问题，容量-费用网络如图 7.12 所示，边旁的第 1 个数是容量，第 2 个数是费用.

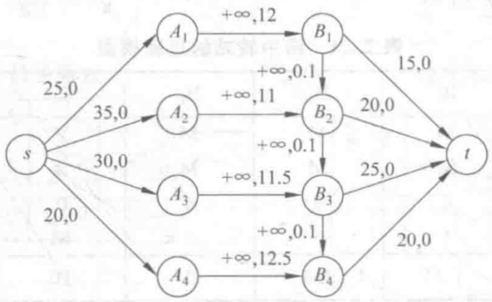

图 7.12

7.22

20%（二部图建模及求解过程 12%，最终分配方案正确 8%）

7.22 某社区有 5 个工作岗位，每个岗位需要一个人. 现接到 5 位待业者的申请，A 申请岗位 1、2 或 3，B 申请岗位 1 或 4，C 和 D 申请 4 或 5，E 申请岗位 5. 如何安排才能使尽可能多的申请者就业？

[8 7 8 4 4]

7.22 作二部图 $G=\langle X,Y,E\rangle$，其中 $X=\{A,B,C,D,E\}$，$Y=\{1,2,3,4,5\}$，$E=\{(x,y)\mid x$ 申请岗位 $y\}$，如图 7.13(a)所示. 问题是求 G 的最大匹配. 用匈牙利算法求解. 前 3 个阶段很容易地得到匹配 $M_1=\{(A,1),(B,4),(C,5)\}$，见图 7.13(b)中的粗线. 接下来经过标号找到增广交错路径 $P=D4B1A2$，$M_2=M_1\oplus P=\{(A,2),(B,1),(C,5),(D,4)\}$ 见图 7.13(c)中的粗线. 图 7.13(c)中的标号表明 M_2 是 G 的最大匹配. 分配方案如下：A 分配岗位 2，B 分配岗位 1，C 分配岗位 5，D 分配岗位 4. E 这次没有岗位.

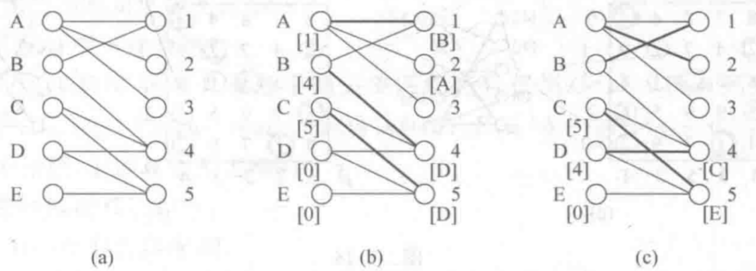

图 7.13