第六次作业评分标准

Liujia Li

Apr. 2025

答案仅供参考，合理即酌情给分

1 题目 6.2(10%)

咖啡制造厂用 3 种咖啡豆制造一种混合咖啡，每种咖啡豆的香味等级、味道等级、售价及库存量如表 1所示。假设混合咖啡的香味等级和味道等级是所用咖啡豆的香味等级和味道等级的加权平均值，等级越高质量越好，现要生产 1000 千克混合咖啡，要求香味等级不低于 75，味道等级不低于 80. 要使成本最低应如何配制？试建立该问题的数学模型。

表 1: 咖啡豆及库存

咖啡豆	香味等级	味道等级	售价/（元/千克）	库存/千克
1	75	86	20	500
2	85	88	28	600
3	60	75	18	400

参考答案：说明参数含义 2%，目标方程与每个约束方程均 1%

设 3 种咖啡豆的比例分别是 x_1，x_2 和 x_3，问题可表述为:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 20x_1 + 28x_2 + 18x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 75x_1 + 85x_2 + 60x_3 \geq 75 \\
& 86x_1 + 88x_2 + 75x_3 \geq 80 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& 1000x_1 \leq 500 \\
& 1000x_2 \leq 600 \\
& 1000x_2 \leq 400 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

2 题目 6.4,(1)(3) (20%)

图解法解下列线性规划 (1)

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & x_1 & \leq 5 \\
& x_2 & \leq 3 \\
& x_1 + 3x_2 & \leq 11 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}$$

参考答案:可行域边界条件每条线 2%，正确画出目标函数并找到最优点 3%。小分 $4*2+3=11$

如图 1最优解为点 A

图解 (3)

$$\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 & \geq 1 \\
& x_2 & \leq 2 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}$$

参考答案：可行域边界条件每条线 2%，正确画出目标函数并找到最优点 3%。小分 $3*2+3=9$

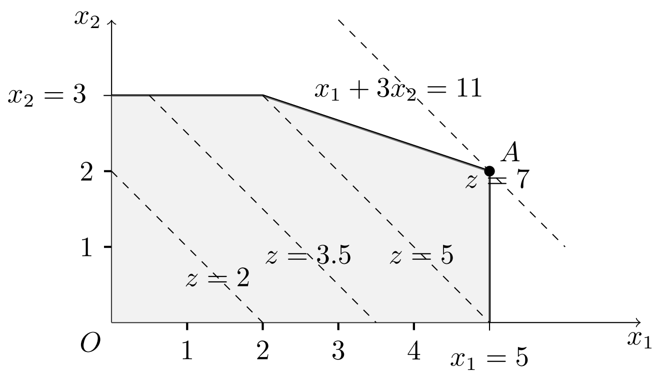

图 1: Figure for 6.4(1)

如图 2最优解为点 A

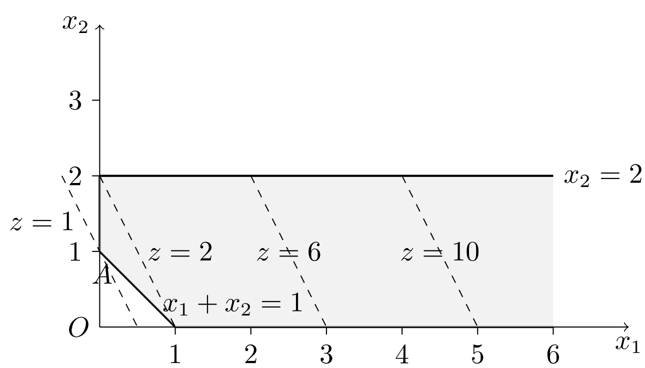

图 2: Figure for 6.4(3)

3 题目 6.6(30%)

设线性规划

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\
& x_1 & \leq 5 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

（1）画出它的可行域，用图解法求最优解.

（2）写出它的标准形，列出所有的基，指出哪些是可行基，通过列出所有的可行解及其目标函数值找到最优解，指出每个可行解对应的可行域的顶点.

参考答案：可行域边界条件每条线 1%，正确画出目标函数并找到最优点 1%。小分 $1 * 5 = 5$

（1）如图 3所示，最优解是点 B。$x_1 = 5, x_2 = 4.5, z = 14.5$。

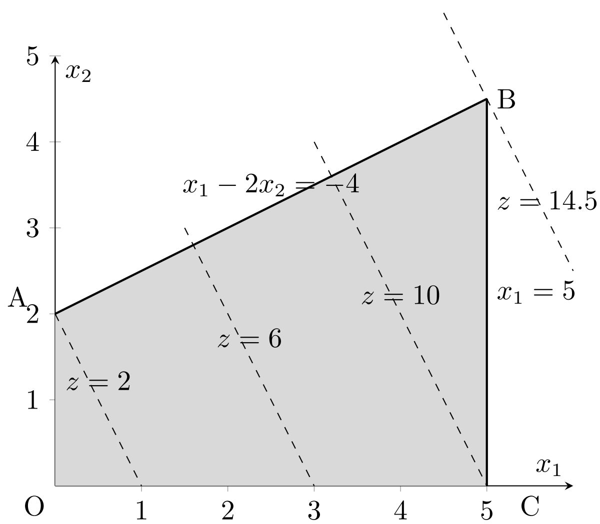

图 3: Figure for 6.6

(2) 参考答案：总 25%。标准形 5%，基，是否为可行基，可行解对应的目标函数以及最优解，可行域顶点 20%。不正确的采用扣分制，每个酌情扣 1 分，至 0 分为止。

标准形为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad = 4 \\
& x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + x_4 = 5 \\
& x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq 4
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = (P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1^{(1)} = 5, \quad x_2^{(1)} = 4.5, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0, \quad z^{(1)} = -14.5.$$

对应点 B，B_1 是可行基。

$$B_2 = (P_1, P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1^{(2)} = 5, \quad x_2^{(2)} = 0, \quad x_3^{(2)} = 9, \quad x_4^{(2)} = 0, \quad z^{(2)} = -10.$$

对应点 C，B_2 是可行基。

$$B_3 = (P_1, P_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1^{(3)} = -4, \quad x_2^{(3)} = 0, \quad x_3^{(3)} = 0, \quad x_4^{(3)} = 9.$$

B_3 是基，但不是可行基。

$$B_4 = (P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{不是基。}$$

$$B_5 = (P_2, P_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1^{(5)} = 0, \quad x_2^{(5)} = 2, \quad x_3^{(5)} = 0, \quad x_4^{(5)} = 5, \quad z^{(5)} = -2.$$

对应点 A，B_5 是可行基。

$$B_6 = (P_3, P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1^{(5)} = 0, \quad x_2^{(5)} = 0, \quad x_3^{(5)} = 4, \quad x_4^{(5)} = 5, \quad z^{(5)} = 0.$$

对应点 O，B_6 是可行基。

$$x^{(1)} = (5, 4.5, 0, 0) \quad \text{是最优解。}$$

4 题目 6.13(20%)

表 2是一张最终单纯形表（最小化），能否判断它是否有无穷多个最优解？若能，请给出你的结论.

表 2: 最终单纯形表（最小化）

			1	-1	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
-1	x_2	2	-1	1	1	0	
0	x_4	10	-3	0	-4	0	
	-z	2	0	0	1	0	

参考答案：给出结论 5%，逻辑合理 15%
由于非基变量 x_1 的检验数 $\lambda_1 = 0$ 且 a_{11}, a_{21} 都小于等于 0，令 $x_1 = \delta, x_3 = 0$，解得 $x_2 = 2 + \delta, x_4 = 10 + 3\delta$. 当 $\delta \geq 0$ 时，(x_1, x_2, x_3, x_4) 是可行解且目标函数值 $z = -2$，从而有无穷多个最优解。

5 题目 6.14(20%)

原始规划

$$\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 & & \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & & \leq 6 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 & & \geq 5 \\
& 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & & = -4 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0, \quad x_4 \text{ 任意} &
\end{aligned}$$

参考答案：写错酌情扣分
对偶规划

$$\min\ 6y_1 - 5y_2 - 4y_3$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & y_1 - y_2 & +2y_3 &\geq 3 \\
& y_1 + 2y_2 & +y_3 &\geq -2 \\
& -y_1 - y_2 & -3y_3 &\geq 1 \\
& -y_1 & +y_3 &= 4 \\
& y_1, y_2 \geq 0, \quad y_3 \text{ 任意} & &
\end{aligned}
$$