第十次作业

近似算法

10.1：给定紧实例 15 分，写出近似比 10 分。

10.1 解 设顶点数为 n，显然，$A(I)\leqslant n-1$，$\mathrm{OPT}(I)\geqslant 1$，$r\leqslant n-1$。

给定紧实例：$G=\langle V,E\rangle$，$V=\{1,2,\cdots,n\}$，$E=\{(i,n)\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}$，如图 10.1 所示。

算法依次选择 $1,2,\cdots,n-1$。$A(I)=n-1$。显然，$\mathrm{OPT}(I)=1$，得

$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}=n-1$$

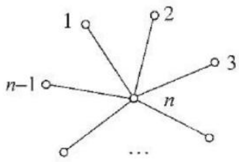

图 10.1 一个紧实例

10.3：25 分

10.3 证 当 $\mathrm{FF}(I)=1$ 时，显然 $\mathrm{FF}(I)=\mathrm{OPT}(I)$。下面设 $FF(I)>1$。记 $W=\sum_{i=1}^{n}w_i$。因为任何两只箱子的重量之和大于 B，因此，当 $\mathrm{FF}(I)$ 为偶数时，$W>\frac{B}{2}\mathrm{FF}(I)$；当 $\mathrm{FF}(I)$ 为奇数时，设最重的箱子的重量为 B_1，则有 $W>\frac{B}{2}(\mathrm{FF}(I)-1)+B_1>\frac{B}{2}\mathrm{FF}(I)$。故总有 $W>\frac{B}{2}\mathrm{FF}(I)$，即 $\mathrm{FF}(I)<\frac{2W}{B}$。又显然 $\mathrm{OPT}(I)\geqslant\frac{W}{B}$，得证 $\mathrm{FF}(I)<2\mathrm{OPT}(I)$。

随机算法

1 找至少第$\lfloor n/2\rfloor$大的数 总共 25 分

（1） 在 n 个数中找最大数至少比较 n-1 次，如果找一个至少第$\lfloor n/2\rfloor$大的数，至少需要多少次比较？

（2） 如果想用更少的比较次数找出一个至少第$\lfloor n/2\rfloor$大的数，就需要容忍一定的错误，请设计一个蒙特卡罗随机算法，使得在错误概率期望不超过 1/n 的情况下，找出一个至少第$\lfloor n/2\rfloor$大的数。

下界：任何一个算法，若求出正确的 x，则需要找到**至少** n - floor(n/2) = ceil(n/2) **个其他数小于等于** x。
每次比较至多确定一个数，**所以至少** ceil(n/2) 次比较。

（3）该算法的时间复杂度是多少？

它满足条件

（1） 至少需要比较$\lceil n/2\rceil$次；（或取整错误，扣 2 分）5 分

（2） 随机独立可重复的抽选$\lceil \log n\rceil$个数，每个数都不是至少$\lceil n/2\rceil$大的概率小于 1/2，所有的数都不是至少$\lceil n/2\rceil$大的概率小于$\left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \log n\rceil}<\frac{1}{n}$； 10 分

（3） 时间复杂度为$\lceil \log n\rceil-1$或$O(\log n)$
（取整错误扣 2 分）10 分

2. 总共 25 假设给定数组 ***L*** 有 ***n*** 个不同的元素（无序排列），现在给定一个待查找元素 ***x***，要确定 ***x*** 是否在 ***L*** 中。现在设计一个随机算法，每次随机从 ***L*** 中选择一个元素和 ***x***

比较，看是否相等。如果相等，则算法输出 yes；如果不等，则再从 ***L*** 中剩下没有比较过的元素中再随机选择一个元素和 ***x*** 比较，直到所有元素都比完为止。如果还没有找到，算法输出 no。假定 ***x*** 出现在 ***L*** 中的概率为 ***p***（**0 < *p* < 1**），请问该随机算法的期望比较次数是多少？请给出具体分析。

参考答案:

$$(1-p)*n+p*\left(\frac{n+1}{2}\right)=n-\frac{p}{2}(n-1)$$

结果正确得 10 分，具体分析 15 分。如果 1-p 没写或写错，扣 3 分，最后化简出错扣 3 分。