LP Rounding

岳镝

2025 年 5 月 23 日

顶点覆盖 (VC)

输入图 $G = (V, E)$，求最小的子集 $V' \subseteq V$，使得 E 中任何一条边均和 V' 中某个顶点相邻

顶点覆盖 (VC)

输入图 $G=(V,E)$，求最小的子集 $V'\subseteq V$，使得 E 中任何一条边均和 V' 中某个顶点相邻

- 思路 1: 贪心（见教材/课件）
- 思路 2: 线性规划

顶点覆盖 (VC)

输入图 $G=(V,E)$，求最小的子集 $V'\subseteq V$，使得 E 中任何一条边均和 V' 中某个顶点相邻

- 思路 1：贪心（见教材/课件）
- 思路 2：线性规划

对于顶点 $v\in V$，变量 $x_v\in\{0,1\}$ 表示是否选取顶点 v

$$
\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{v\in V} x_v \\
& \text{s.t.} && x_u + x_v \geq 1, \forall (u,v)\in E; \\
& && x_v\in\{0,1\}, \forall v\in V.
\end{aligned}
$$

顶点覆盖 (VC) — Relaxation

输入图 $G = (V, E)$，求最小的子集 $V' \subseteq V$，使得 E 中任何一条边均和 V' 中某个顶点相邻

- 思路 1: 贪心（见教材/课件）
- 思路 2: 线性规划

对于顶点 $v \in V$，变量 $x_v \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1, \forall (u, v) \in E; \\
& 0 \leq x_v \leq 1, \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

顶点覆盖 (VC) — Rounding

对于顶点 $v \in V$，变量 $x_v \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1, \forall (u,v) \in E; \\ & 0 \leq x_v \leq 1, \forall v \in V. \end{aligned}$$

假设最优解是 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{|V|}^*)$

顶点覆盖 (VC) — Rounding

对于顶点 $v \in V$，变量 $x_v \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
& \text{minimize} \sum_{v \in V} x_v \\
\text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1, \forall (u, v) \in E; \\
& 0 \leq x_v \leq 1, \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

假设最优解是 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{|V|}^*)$

怎样根据 x_v^* 的值确定是否选取顶点 v?

顶点覆盖 (VC) — Rounding

对于顶点 $v \in V$，变量 $x_v \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{v \in V} x_v \\
& \text{s.t.} && x_u + x_v \geq 1, \forall (u,v) \in E; \\
& && 0 \leq x_v \leq 1, \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

假设最优解是 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{|V|}^*)$

怎样根据 x_v^* 的值确定是否选取顶点 v?

- 若 $x_v^* \geq 1/2$，则将 v 加入 V'
- 若 $x_v^* < 1/2$，则不将 v 加入 V'

顶点覆盖 (VC) — Rounding

假设最优解是 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{|V|}^*)$

- 若 $x_v^* \geq 1/2$，则将 v 加入 V'
- 若 $x_v^* < 1/2$，则不将 v 加入 V'

命题

上述算法构造的子集 V' 满足以下条件

(1) V' 是 V 的一个顶点覆盖

(2) $|V'| \leq 2\,\mathrm{OPT}$

LP Rounding

(1) 把问题建模成一个整数规划 (IP)
(2) Relaxation: 把整数变量松弛为实数，转化为线性规划 (LP)
(3) 解线性规划，得到最优值 OPT_{LP} 和最优解 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$
(4) Rounding: $x_i^* \xrightarrow{\text{round}} x_i \in \mathbb{Z}$，得到原问题的（近似）解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$
(5) 分析近似比

集合覆盖 (Set Cover)

问题 (Set Cover)

给定集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和一族子集 $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq [n]$，
选取最少数量的子集 $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$，使得
$S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k} = [n]$

集合覆盖 (Set Cover)

问题 (Set Cover)

给定集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ 和一族子集 $S_1,S_2,\ldots,S_m\subseteq[n]$，选取最少数量的子集 $S_{i_1},S_{i_2},\ldots,S_{i_k}$，使得 $S_{i_1}\cup S_{i_2}\cup\cdots\cup S_{i_k}=[n]$

- 回忆：集合覆盖问题是 NP 完全的
- 简单起见，假设每个元素 i 至多在 f 个子集中出现

集合覆盖 (Set Cover)

问题 (Set Cover)

给定集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 和一族子集 $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq [n]$，选取最少数量的子集 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$，使得 $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k} = [n]$

- 简单起见，假设每个元素 i 至多在 f 个子集中出现
- 整数规划/线性规划？

集合覆盖 (Set Cover)

问题 (Set Cover)

给定集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和一族子集 $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq [n]$，选取最少数量的子集 $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$，使得 $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k} = [n]$

- 简单起见，假设每个元素 i 至多在 f 个子集中出现
- Rounding?

集合覆盖 (Set Cover)

问题 (Set Cover)

给定集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和一族子集 $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq [n]$，选取最少数量的子集 $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$，使得 $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_k} = [n]$

- 简单起见，假设每个元素 i 至多在 f 个子集中出现
- 近似比？

MAX-SAT

问题 (MAX-SAT)

给定关于变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的简单析取式 $C_1, C_2, \ldots, C_m$，求可同时满足的析取式个数最大值

MAX-SAT

问题 (MAX-SAT)

给定关于变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的简单析取式 $C_1, C_2, \ldots, C_m$，求可同时满足的析取式个数最大值

- 整数规划/线性规划？
- 提示：用 $y_j \in \{0, 1\}$ 表示变量 x_j 的赋值，用 $z_i \in \{0, 1\}$ 表示析取式 C_i 是否满足

MAX-SAT

问题 (MAX-SAT)

给定关于变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的简单析取式 $C_1, C_2, \ldots, C_m$，求可同时满足的析取式个数最大值

- Rounding?

MAX-SAT

问题 (MAX-SAT)

给定关于变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的简单析取式 $C_1, C_2, \ldots, C_m$，求可同时满足的析取式个数最大值

- 近似比？