NP 与 NP 完全性

岳镝

2025 年 5 月 16 日

《理论计算机科学基础》

《计算理论导论》

回忆：语言和判定问题

- 只需要回答“是”或者“否”的问题被称为判定问题
- 用 $\{0,1\}^*$ 表示所有有限长度的二进制串组成的集合
- 子集 $L \subseteq \{0,1\}^*$ 称为一个语言
- L 对应的判定问题：输入 $x \in \{0,1\}^*$，问 $x \in L$?
- 判定问题 Π 对应的语言：回答为“是”的实例组成的集合

$\Pi = \langle D_\Pi, Y_\Pi \rangle$

$D_\Pi = \{0,1\}^*$ $\quad$ $Y_\Pi = L$

NP 类

- P: 多项式时间可判定的语言集合
- NP: 多项式时间可验证的语言集合

NP 类

- P: 多项式时间可判定的语言集合
- NP: 多项式时间可验证的语言集合

定义 (验证机，Verifier)

称算法 V 为语言 L 的验证机，若满足

(1) 若 $x \in L$，则存在 w 使得 $V(x, w) = \text{acc}$

(2) 若 $x \notin L$，则任意 w 均有 $V(x, w) = \text{rej}$

proof / witness

NP 类

polynomial

- P: 多项式时间可判定的语言集合
- NP: 多项式时间可验证的语言集合

non-deterministic

定义 (验证机，Verifier)

称算法 V 为语言 L 的验证机，若满足

(1) 若 $x \in L$，则存在 w 使得 $V(x, w) = \text{acc}$

(2) 若 $x \notin L$，则任意 w 均有 $V(x, w) = \text{rej}$

多项式时间可验证

- “短”证据：$|w| = \text{poly}(|x|)$
- 多项式运行时间

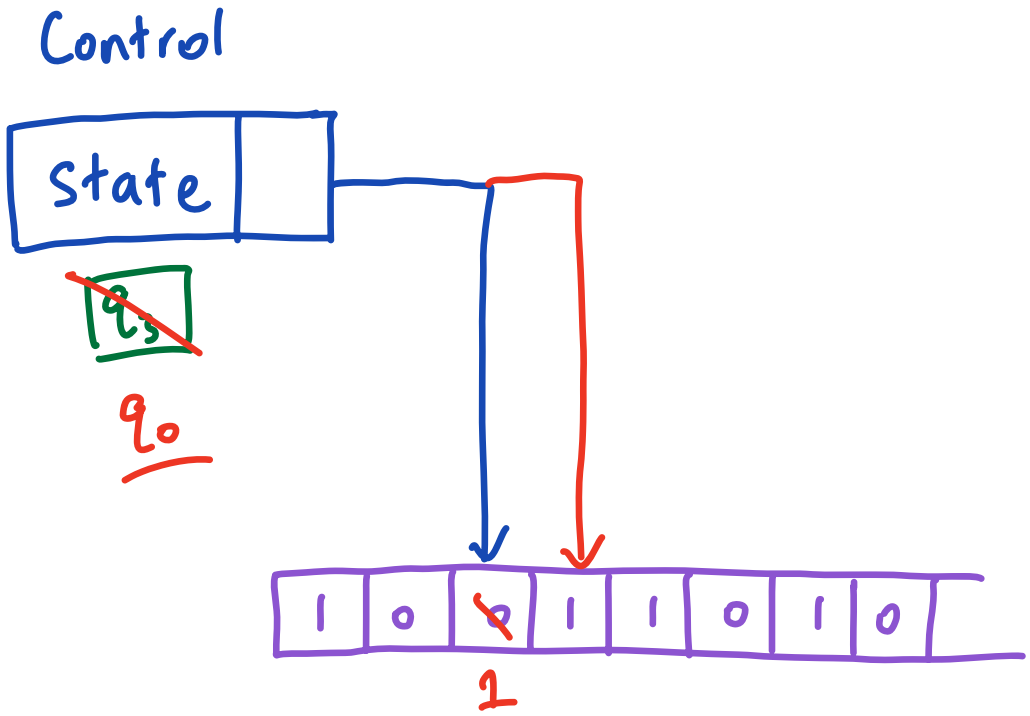
poly(|x|)

例子 $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_2 \vee x_3)$

- 3-SAT: x 是公式，w 是成真赋值
- 哈密顿回路：x 是图，w 是图中的哈密顿回路

等价定义：非确定型多项式时间可判定

回忆：图灵机模型



Read	State	Write	Move
$(q_0, 0)$	q_1	0	左
$(q_0, 1)$	q_2	1	左
$(q_3, 0)$	q_0	1	右
$(q_3, 1)$	q_0	1	左
$(q_{acc}, 0)$	q_{acc}	/	acc
$(q_{rej}, 1)$	q_{rej}	/	rej

等价定义：非确定型多项式时间可判定

回忆：图灵机模型

图灵机是一个 7 元组 $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$

(1) Q 是状态集合

(2) Σ 是输入字母表，即 $\Sigma = \{0, 1\}$

(3) Γ 是纸带字母表，包含空白字符。$\Sigma \subseteq \Gamma$

(4) $\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\text{L}, \text{R}\}$ 称为转移函数

(5) $q_0 \in Q$ 称为初始状态

(6) $q_{\text{acc}} \in Q$ 称为接受状态

(7) $q_{\text{rej}} \in Q$ 称为拒绝状态

等价定义：非确定型多项式时间可判定

回忆：图灵机模型

非确定型图灵机 (NTM) 是一个 7 元组
$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$

(1) Q 是状态集合

(2) Σ 是输入字母表，即 $\Sigma = \{0, 1\}$

(3) Γ 是纸带字母表，包含空白字符。$\Sigma \subseteq \Gamma$

(4) $\delta \colon Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\text{L}, \text{R}\})$ 称为转移函数

(5) $q_0 \in Q$ 称为初始状态

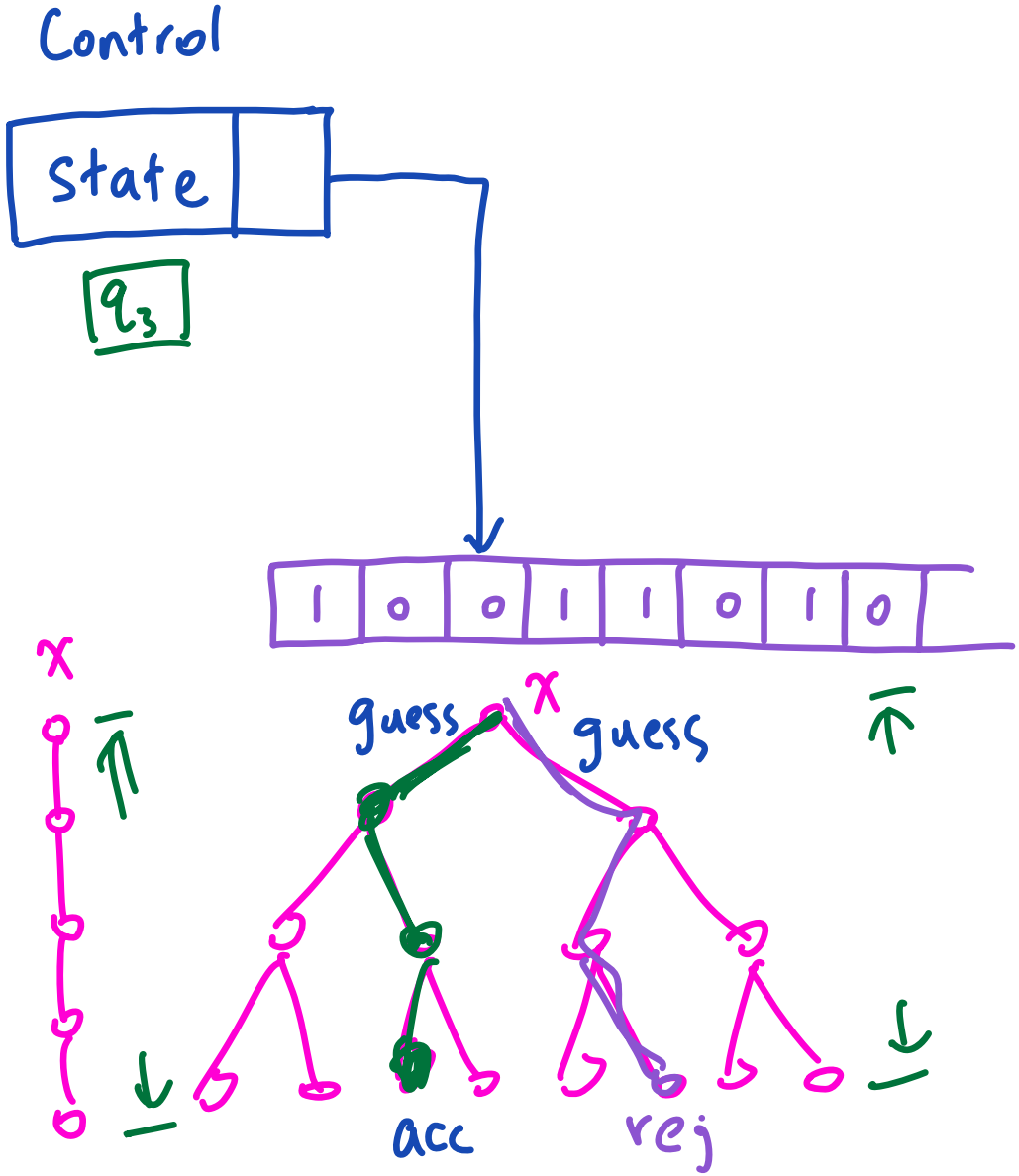
(6) $q_{\text{acc}} \in Q$ 称为接受状态

(7) $q_{\text{rej}} \in Q$ 称为拒绝状态

称 N 接受 x 当且仅当 N 在输入 x 上存在一个接受计算分支

等价定义：非确定型多项式时间可判定

回忆：图灵机模型



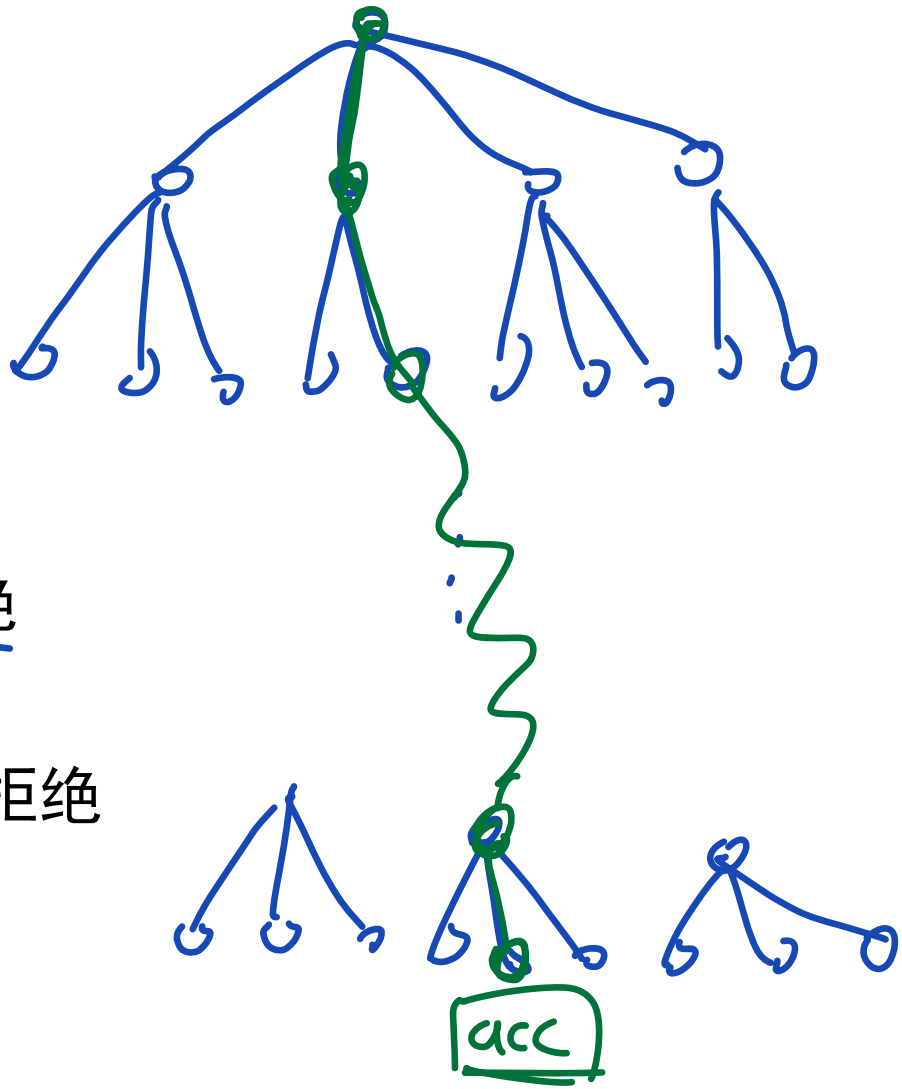
Read	State	Write	Move
$(q_0, 0)$	q_1	0	左
	q_2	0	右
$(q_0, 1)$	q_2	1	左
	q_3	0	左
	q_1	0	右
$(q_3, 0)$	q_0	1	右
	q_{acc}	0	右
$(q_3, 1)$	q_0	1	左
	q_{rej}	0	右
$(q_{acc}, 0)$	q_{acc}	/	acc
$(q_{rej}, 1)$	q_{rej}	/	rej

等价定义：非确定型多项式时间可判定

例子：哈密顿回路问题的一个非确定型判定算法（图灵机）

输入：图 $G = (V, E)$

1. 任选 $v_0 \in V$, $S \leftarrow \{v_0\}$
2. For $i = 1, 2, \ldots, n-1$ do
3. 猜 任选 $v_i \in V$
4. 若 $v_i \in S$，立即拒绝
5. 若 $(v_{i-1}, v_i) \notin E$，立即拒绝
6. $S \leftarrow S \cup \{v_i\}$
7. 若 $(v_{n-1}, v_0) \in E$，接受；否则拒绝



等价定义：非确定型多项式时间可判定

定理 (NP 等价定义)

语言 L 多项式时间可验证 $\Longleftrightarrow$ 存在 L 的非确定型多项式时间判定算法（图灵机）

N P

$\Rightarrow$

Given verifier V

Construct $N-$Algorithm A

A:

Input x

1. Guess w.

2. Output $V(x,w)$

$\Leftarrow$:

Given $N-$Alg. A

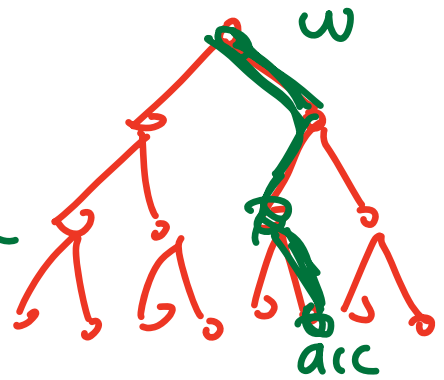
Construct verifier V

$x \in L$, x 的证据 = ?

x 的证据 = A 的“任选”方法

$V(x,w)$

把 w 看成每次分支的路径



多项式时间变换 (Karp 归约)

定义 (多项式时间变换，Karp 归约)

称映射 $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ 是语言 A 到语言 B 的多项式时间变换 (Karp 归约)，若满足

(1) f 多项式时间可计算

(2) $\forall x,\ x \in A$ 当且仅当 $f(x) \in B$

此时称 A 多项式时间变换 (Karp 归约) 到 B；记作 $A \leqslant_p B$

$x \in A$?

1. Compute $y = f(x)$

2. Compute $y \in B$ { Yes → $x \in A$; No → $x \notin A$

多项式时间变换 (Karp 归约)

定义 (多项式时间变换，Karp 归约)

称映射 $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ 是语言 A 到语言 B 的多项式时间变换 (Karp 归约)，若满足

(1) f 多项式时间可计算

(2) $\forall x, x \in A$ 当且仅当 $f(x) \in B$

此时称 A 多项式时间变换 (Karp 归约) 到 B；记作 $A \leqslant_p B$

要点

- 直觉：$\leqslant_p$ 是一种关于“难度”的偏序
- f 多项式时间可计算
- “当且仅当”：需要验证两个方向
- 请对比课上讲的 Turing 归约 (Cook 归约)

已知 SAT ∈ NPC

证 HC ∈ NPC

SAT $\leqslant_p$ HC

多项式时间变换 (Karp 归约)

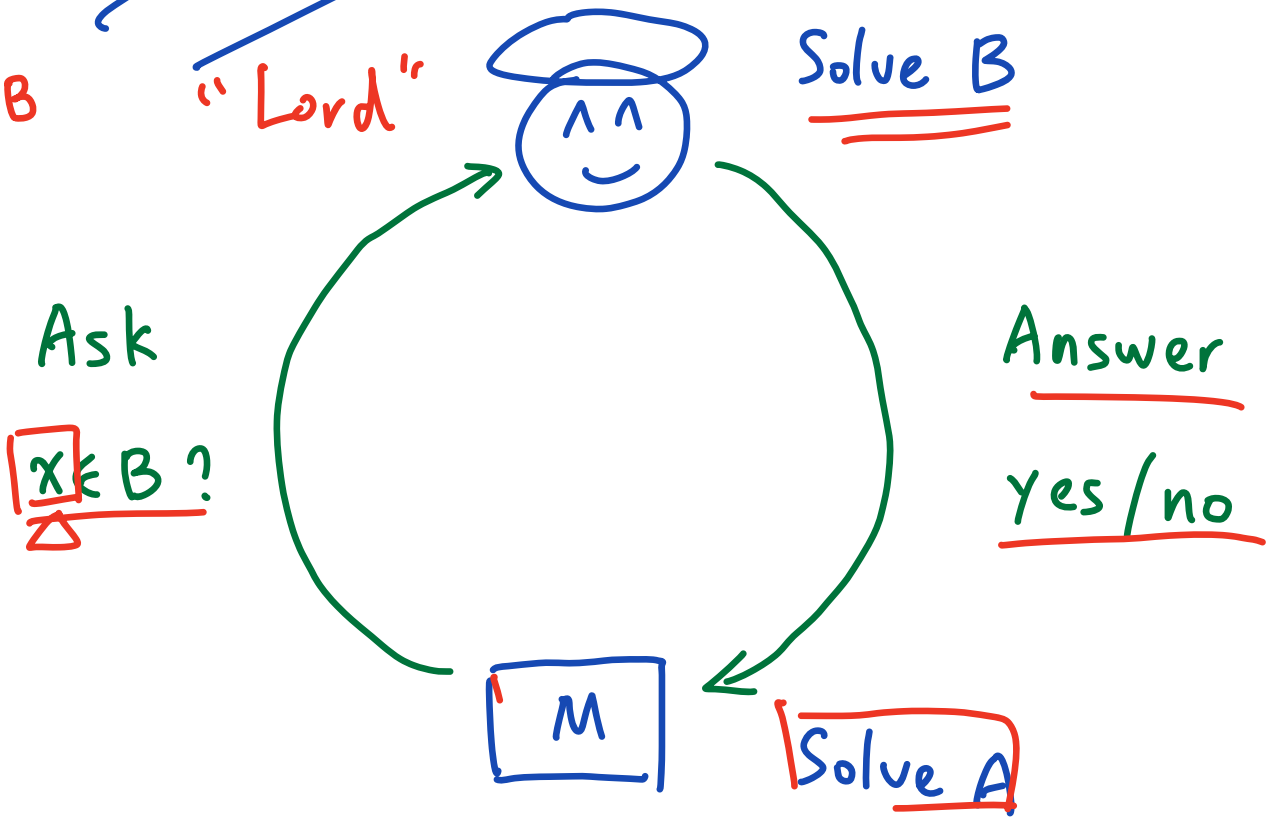
例：证明 $3-\mathrm{SAT} \leqslant_p \mathrm{CLIQUE}$

补充内容：Cook 归约

定义 (Cook 归约)

称问题 A 可 Cook 归约到问题 B，若存在多项式时间的谕示图灵机 M，使得对于计算 B 的任意算法 f，均满足 M^f 计算 A。其中 M^f 表示允许 M 以算法 f 的计算结果作为谕示。记作

$$A \leqslant_T B$$



补充内容：Cook 归约

定义 (Cook 归约)

称问题 A 可 Cook 归约到问题 B，若存在多项式时间的谕示图灵机 M，使得对于计算 B 的任意算法 f，均满足 M^f 计算 A。其中 M^f 表示允许 M 以算法 f 的计算结果作为谕示。记作 $A \leqslant_T B$

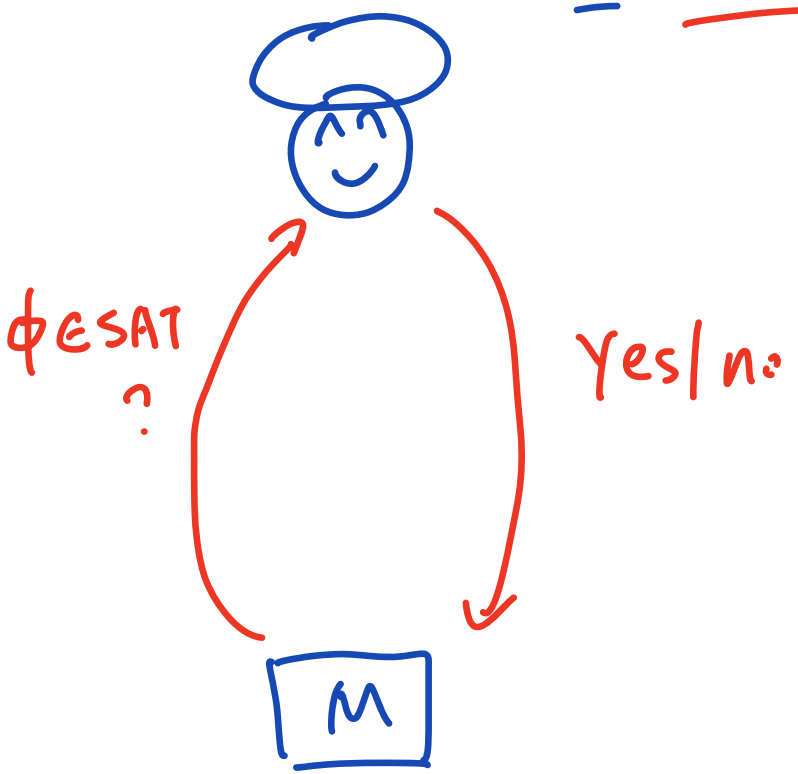
- 谕示图灵机 M^f: M 在运行过程中，允许使用任意输入 x 向 $f(\cdot)$ 提问，并在 $O(1)$ 时间得到回复 $f(x)$
- 在 M 的视角下：类似于请求神谕 (oracle)，只关心结果 $f(x)$，并不关心 $f(\cdot)$ 具体是怎么计算的

补充内容：Cook 归约

例：证明 $3-\mathrm{SAT}$ 搜索问题 $\leqslant_T$ $3-\mathrm{SAT}$ 判定问题

$\phi(x_1,\cdots x_n)$. 求 $x_1,\cdots,x_n$

s.t. $\phi(x_1,\cdots x_n)=1$



$\phi=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee\neg x_2\vee x_3)$

$\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3)$

Let $x_1=0$

$\phi_0=(x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_2\vee x_3)$

Ask $\phi_0\in SAT$?

补充内容：其他复杂性类

定义 (coNP)

称语言 $L \in \mathrm{coNP}$，若 $\overline{L} \in \mathrm{NP}$

例子

- $L = \{\phi\colon \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 不可满足$\}$
- $\mathrm{FACTOR} = \{\langle x, y\rangle\colon x$ 存在不超过 y 的非平凡因子$\}$

性质

- $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$
- 注意：coNP 不是 NP 的补集!

补充内容：其他复杂性类

定义 (PCP)

给定函数 $r, q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。称语言 $L \in \mathrm{PCP}(r, q)$，若存在多项式时间随机算法 V，满足以下条件：

(1) 若 $x \in L$，则存在 w，满足 $V(x, w) = \mathrm{acc}$

(2) 若 $x \notin L$，则任意 w，$\Pr[V(x, w) = \mathrm{acc}] \leq 1/2$

(3) 对于输入 $\langle x, w \rangle$，V 至多使用 $r(|x|)$ 个随机比特，访问 w 的至多 $q(|x|)$ 个比特

补充内容：其他复杂性类

定义 (PCP)

给定函数 $r, q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。称语言 $L \in \mathrm{PCP}(r, q)$，若存在多项式时间随机算法 V，满足以下条件：

(1) 若 $x \in L$，则存在 w，满足 $V(x, w) = \mathrm{acc}$

(2) 若 $x \notin L$，则任意 w，$\Pr[V(x, w) = \mathrm{acc}] \leq 1/2$

(3) 对于输入 $\langle x, w\rangle$，V 至多使用 $r(|x|)$ 个随机比特，访问 w 的至多 $q(|x|)$ 个比特

定理 (PCP 定理)

$$\mathrm{NP} = \mathrm{PCP}(O(\log n), O(1))$$

可能的应用场景：签到、批改作业、~~复习期末考试~~...