网络流

岳镝

2025 年 4 月 18 日

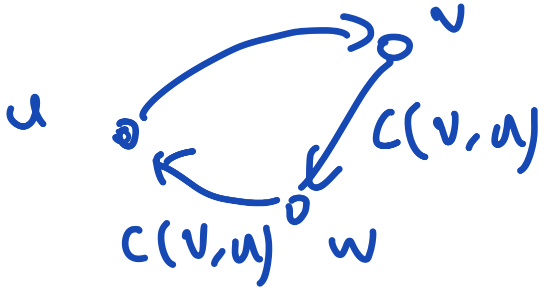
容量网络

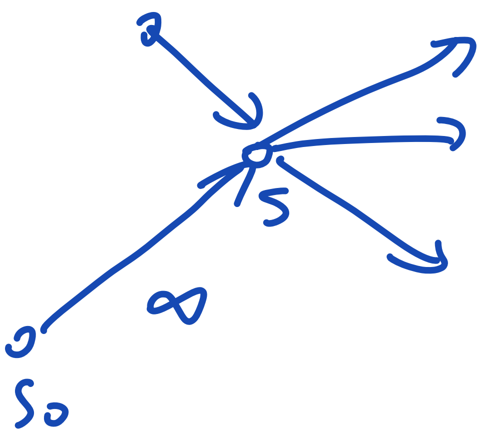
容量网络：有向连通图 $G = (V, E)$，边权（容量）$c(e) \geq 0$，源点 $s \in V$，汇点 $t \in V$

两个假设：

(1) 不存在平行边

(2) 源点入度为 0，汇点出度为 0





流

函数 $f\colon E \to \mathbb{R}$ 称为 G 的一个可行流，若满足

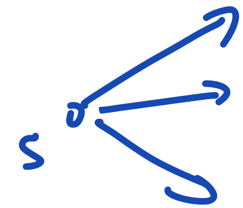
(1) 容量限制：$\forall (u,v) \in E,\ 0 \le f(u,v) \le c(u,v)$

(2) 平衡条件：$\forall u \in V \setminus \{s,t\}$,

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v,u)$$

流量

可行流 f 的流量定义为



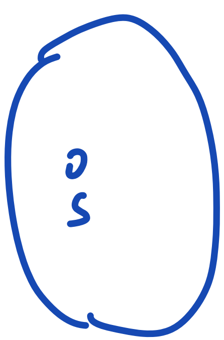
$$|f| := \sum_{(s,v)\in E} f(s,v)$$

两个性质：

(1) $|f| = \sum_{(s,v)\in E} f(s,v) = \sum_{(v,t)\in E} f(v,t)$

(2) 若子集 $S \subseteq V$ 满足 $s \in S$，则

$$|f| = \underbrace{\sum_{u\in S}\sum_{v\in V\setminus S} f(u,v)}_{\text{流出}} - \underbrace{\sum_{u\in S}\sum_{v\in V\setminus S} f(v,u)}_{\text{流入}}$$



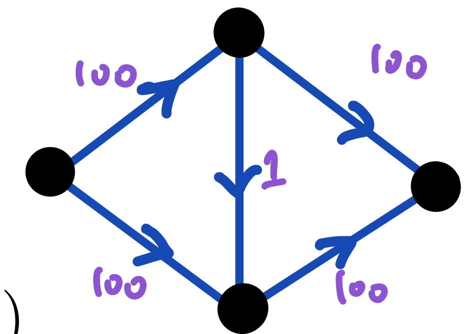
最大流及其算法

目标：找 G 上的可行流 f，使得 $|f|$ 最大

最大流及其算法

目标：找 G 上的可行流 f，使得 $|f|$ 最大

基本思想：不断寻找当前 G 中的增广路径，逐步增大 $|f|$，有限步后收敛



- 任意增广路径 (Ford-Fulkerson): $O(mf^*)$
- 最短增广路径 (Edmonds-Karp): $O(nm^2)$
- 分层辅助网络 + 前向增广路径 (Dinic): $O(n^3)$
- ...

$\tilde{O}$: $O(f)$ $\tilde{O}(f) = O(f \cdot \text{polylog}(f))$

一个小常识：最大流问题的 state-of-the-art 算法做到近线性复杂度：$\tilde{O}(m^{1+o(1)})$ （假设容量 $\leq \text{poly}(n)$） $O(m \cdot \log^5 n \cdot \log\log n) = \tilde{O}(m)$

- *Maximum Flow and Minimum-Cost Flow in Almost-Linear Time* (Chen-Kyng-Liu-Peng-Gutenberg-Sachdeva, FOCS 2022 Best Paper)

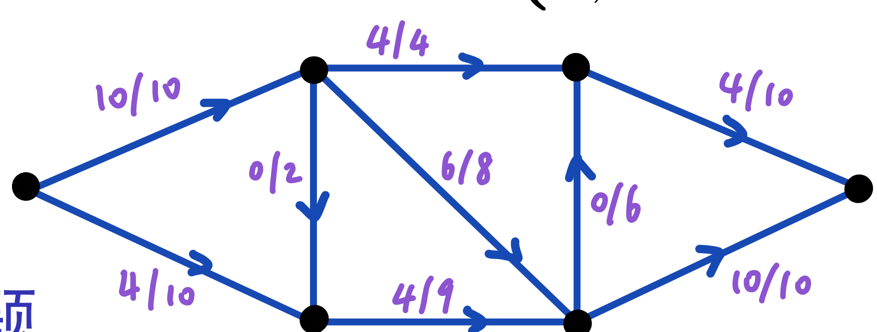
FOCS, STOC, SODA

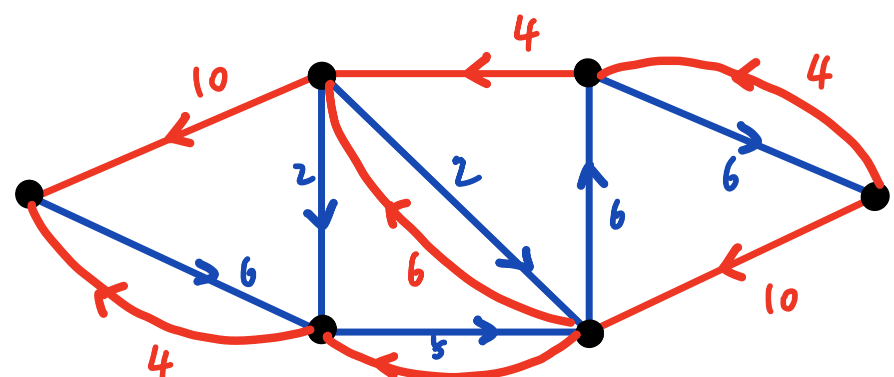
增广路径与辅助网络

增广路径：前向边非饱和，后向边非零流

辅助网络：$G_f = (V, E_f)$，以及容量

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), & (u,v) \in E, \\ f(v,u), & (v,u) \in E, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$





命题

f 是 G 上的最大流当且仅当 G 中不存在 $s \to t$ 增广路径（G_f 中不存在 $s \to t$ 路径）

正确性

$\forall\, C=(S,T).\quad |f| \le c(S,T)$

$= c(S,T)$

$\Rightarrow |f| = \text{max-flow} \le \text{min-cut}$

命题

f 是 G 上的最大流当且仅当 G 中不存在 $s \to t$ 增广路径（G_f 中不存在 $s \to t$ 路径）

证明.

以下命题等价

(1) f 是最大流

(2) G 中不存在 $s \to t$ 增广路径

(3) 存在一个割 $C=(S,T)$，满足 $c(S,T)=|f|$

$c(S,T)$

$=$

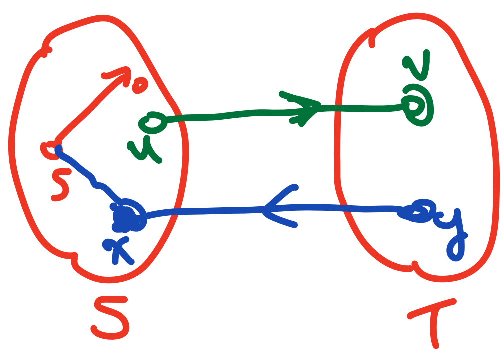
$|f| = f(S,T) - \underbrace{f(T,S)}_{=0}$

$S = \{v : \exists\, s \to v \text{ 增广路径}\}$ □

(1) $\Rightarrow$ (2) ✓

(2) $\Rightarrow$ (3) ✓

(3) $\Rightarrow$ (1)



正确性

命题

f 是 G 上的最大流当且仅当 G 中不存在 $s \to t$ 增广路径（G_f 中不存在 $s \to t$ 路径）

证明.

以下命题等价

(1) f 是最大流

(2) G 中不存在 $s \to t$ 增广路径

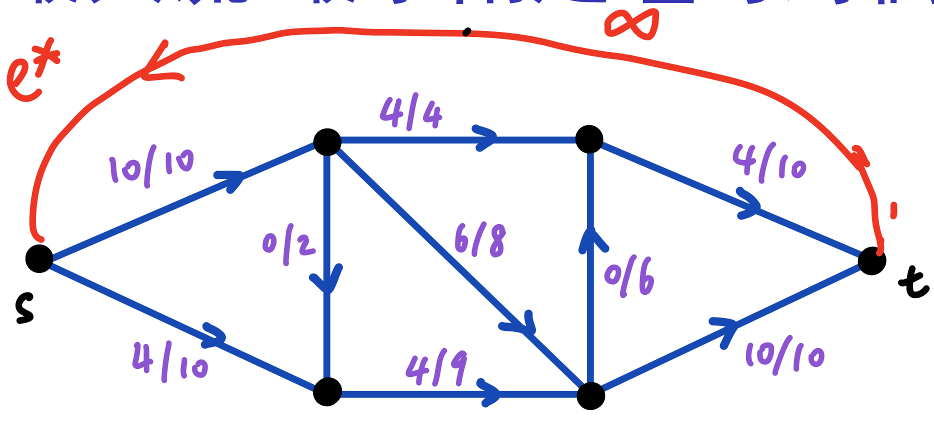
(3) 存在一个割 $C = (S, T)$，满足 $c(S, T) = |f|$

$\square$

推论（最大流-最小割定理）

最大流 $=$ 最小割

最大流-最小割定理与对偶线性规划



m+1 variables   m+2n constraints

→ m+2n variables   m+1

$e \in E$, f_e.

m+1

$$\text{maximize } 1 \cdot f_{e^*}$$

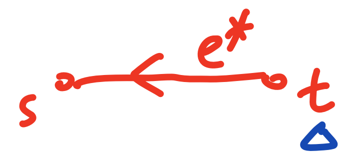
$$\text{s.t. } f_e \le c(e), \ \forall e \in E. \qquad g_e$$

$$\sum_{e \in In(v)} f_e - \sum_{e \in Out(v)} f_e \le 0 \qquad x_v$$

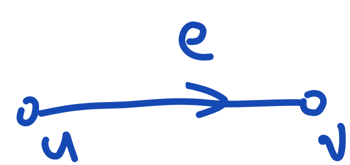
$$-\sum_{e \in In(v)} f_e + \sum_{e \in Out(v)} f_e \le 0 \qquad \boxed{y_v}$$

$$\text{minimize } \sum_{e \in E} c(e) \cdot g_e$$

s.t.



$$1 \cdot x_s - x_t - \boxed{y_s} + y_t \ge 1$$



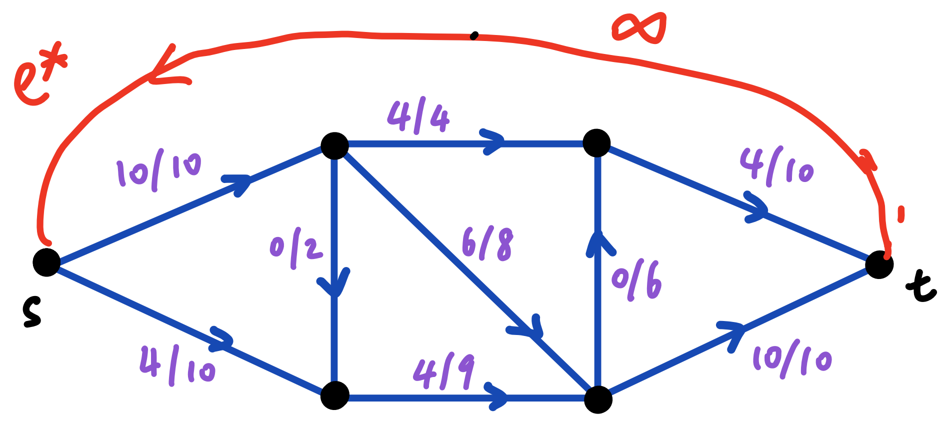
$$\begin{cases} \Phi_s - \Phi_t \ge 1 \\ g_e \ge \Phi_u - \Phi_v \end{cases}$$

$$g_e + x_v - \boxed{x_u} - y_v + y_u \ge 0$$

$\forall v$, $\Phi_v = x_v - y_v$

$$\min \sum_{e \in E} c(e) \cdot g_e$$

s.t. $\Phi_s - \Phi_t \ge 1$



$g_e \ge \Phi_u - \Phi_v$.

$\forall e = (u,v)$

$g_e \ge 0$, Φ_v 任意