最小割

岳镝

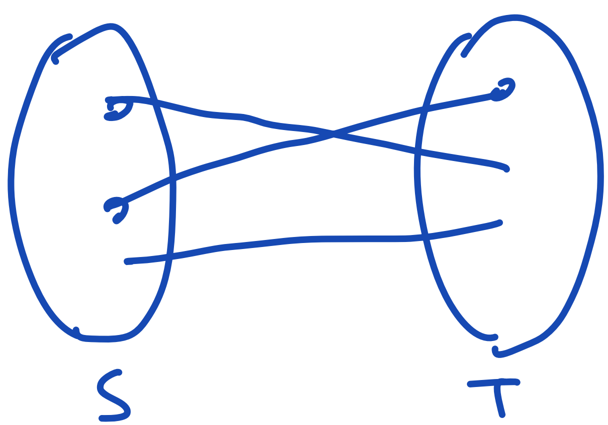
2025 年 4 月 18 日

问题

给定带权无向图 $G = (V, E, w_{\geq 0})$，求 G 的最小割

等价描述：求顶点集 V 的一个划分 $V = S \cup T$，最小化

$$\sum_{u \in S, v \in T, (u,v) \in E} w(u, v).$$



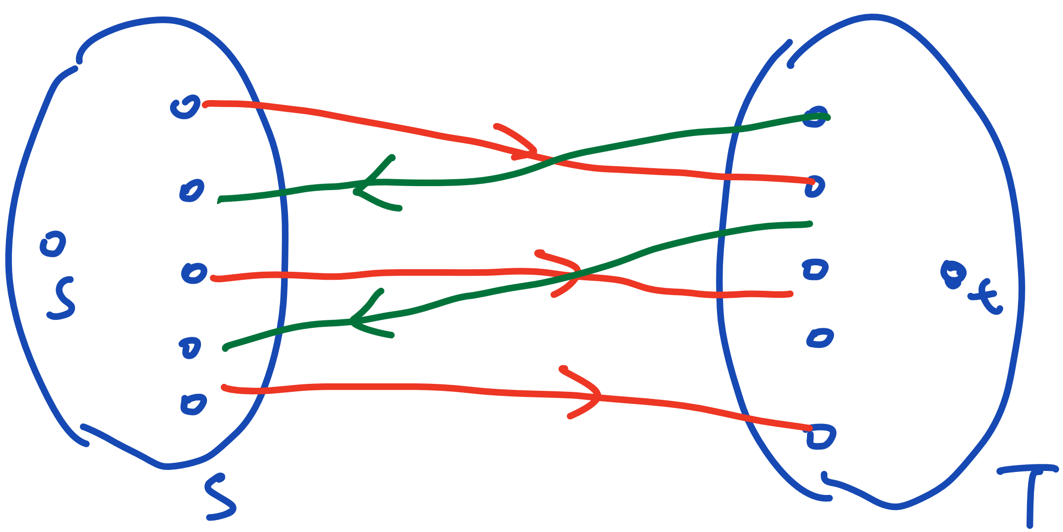
回忆：最大流-最小割定理

① s-t Max-flow = s→t Min-cut

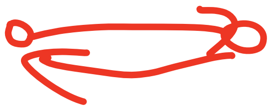
② Min-cut =

定理（最大流-最小割定理）
最大流 = 最小割。

直接运行最大流算法，时间复杂度 Max-Flow(n, m)?



回忆：最大流-最小割定理



定理（最大流-最小割定理）

~~最大流=最小割。~~

$s \to t$ 最大流 $=$ $s \to t$ 最小割。

算法：枚举源点 s 和汇点 t，运行 $s \to t$ 最大流算法，复杂度 $n^2 \cdot \text{Max-Flow}(n, m)$

$\binom{n}{2}$

回忆：最大流-最小割定理

定理（最大流-最小割定理）

~~最大流= 最小割。~~

$s \to t$ 最大流 $= s \to t$ 最小割。

算法：枚举源点 s 和汇点 t，运行 $s \to t$ 最大流算法，复杂度 $n^2 \cdot \text{Max-Flow}(n, m)$

改进：固定源点 s，枚举汇点 t，运行 $s \to t$ 最大流算法，复杂度 $n \cdot \text{Max-Flow}(n, m)$

Max-Flow

- 任意增广路径 (Ford-Fulkerson): $O(mf^*)$
- 最短增广路径 (Edmonds-Karp): $O(nm^2)$
- 分层辅助网络 + 前向增广路径 (Dinic): $O(n^3)$ → $O(n^4)$
- SOTA: $\tilde{O}(m^{1+o(1)})$

另一个问题

2^n 个割

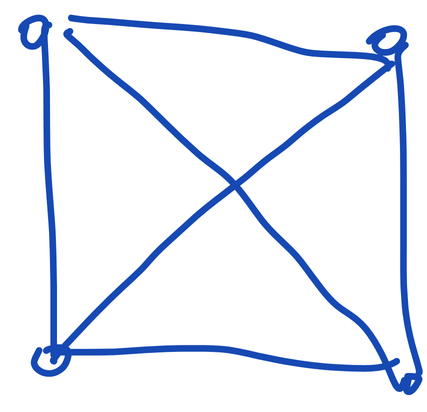
n 个顶点的图 G，有多少个最小割？

A. 常数：$O(1)$ 0

B. 多项式：$n^{O(1)}$ 多 33%

C. 亚指数：$n^{\log^{O(1)} n}$ 0

D. 指数：$2^{O(n)}$ 1



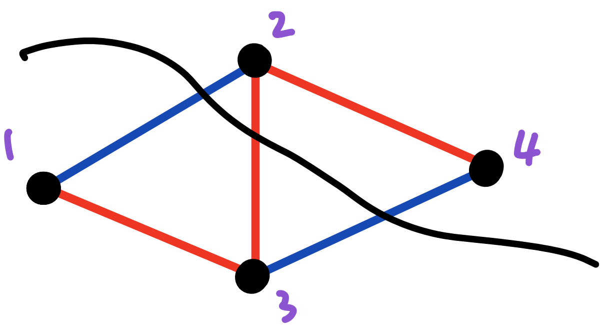
K_4

3个

K_n n个

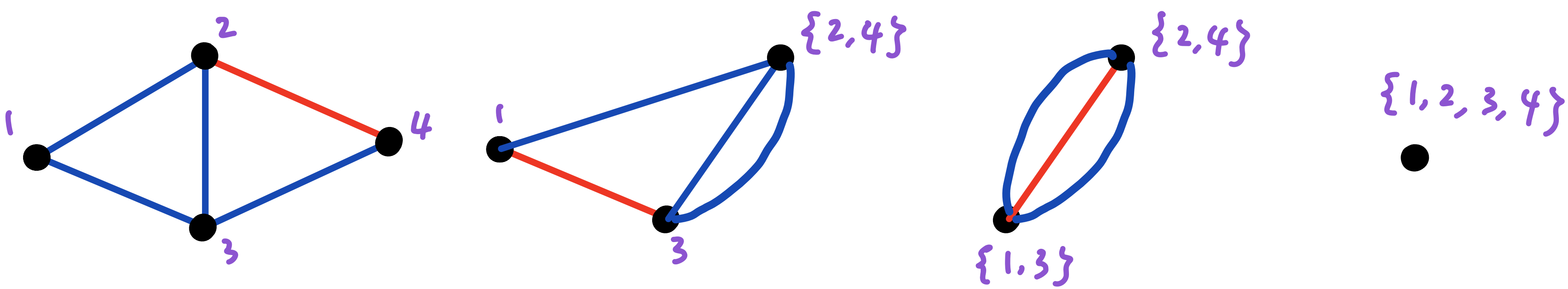
收缩边

回忆：最小生成树 Kruskal 算法



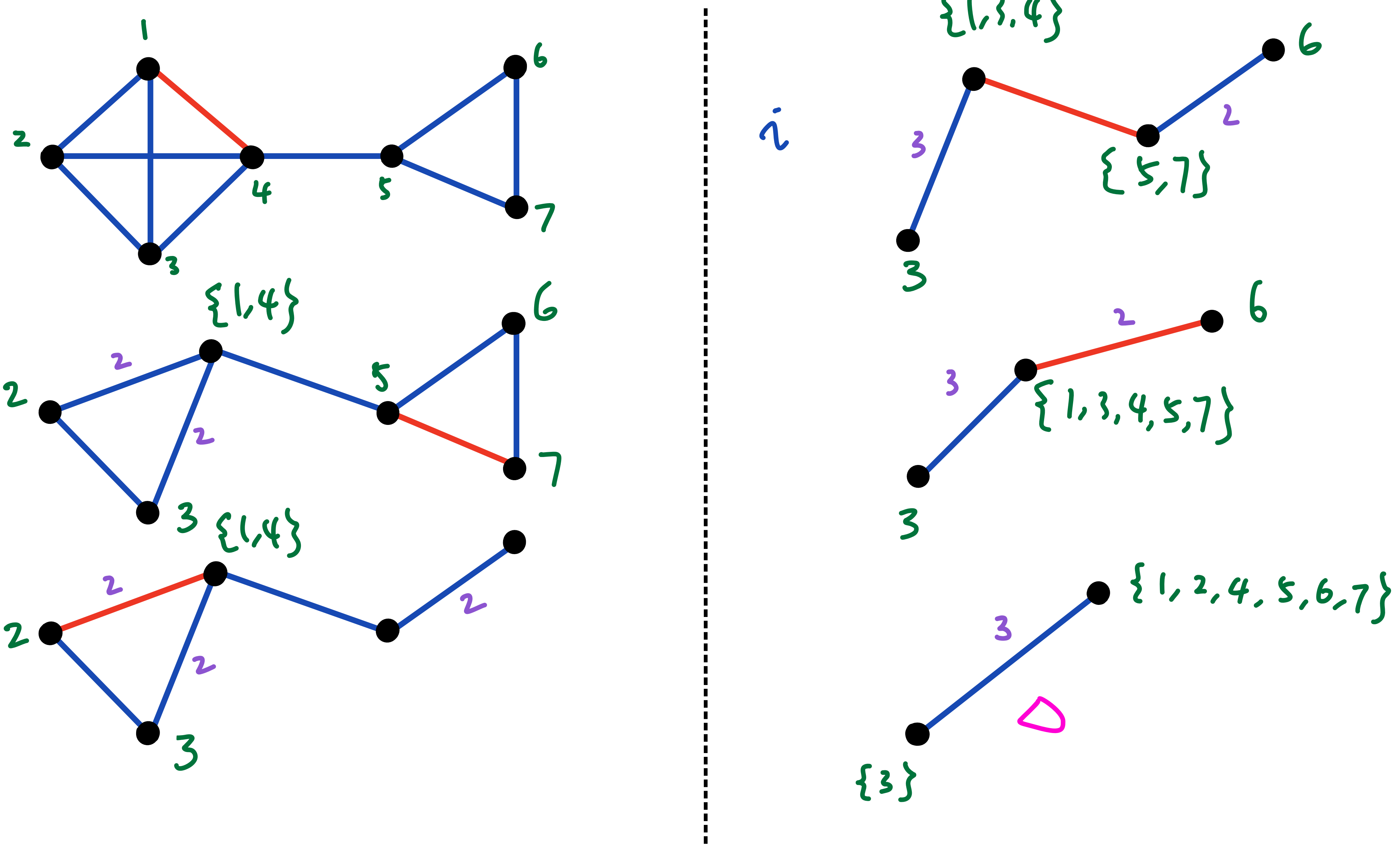
按顺序选取一条边，连接两个连通分支

等价描述：按顺序选取一条边，收缩



收缩边

按顺序选取一条边，收缩



算法框架

1. 输入图 $G=(V,E,w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i=n,n-1,\ldots,3$ do　　stage i
   a. 按顺序选取一条边 $e \in E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2=\{s,t\}$ 对应所求划分，$E_2=\{e\}$ 对应割边

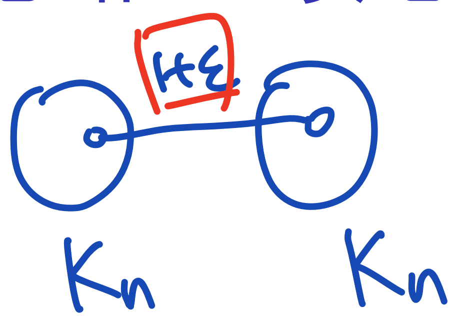
① $|V_{i-1}|=|V_i|-1=i-1$

② $E_{i-1} \leftarrow E_i$ 合并 e

③ 平行边权值相加

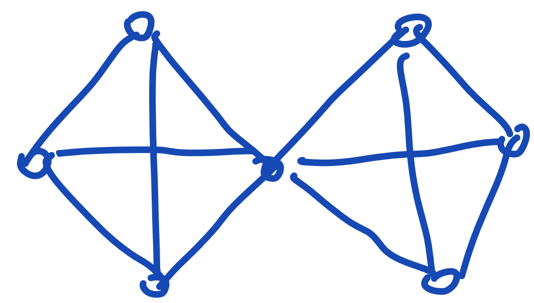
问题：按什么顺序收缩边？

思路 1：贪心



Min-cut = 1+ε

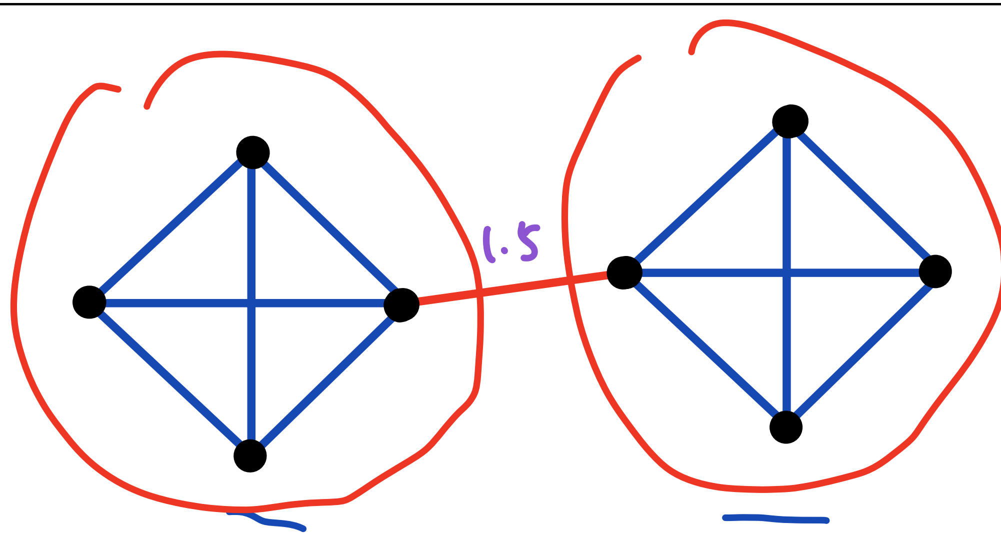
返回 ≥ n-1



Min-cut = 3

1. 输入图 $G=(V,E,w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i = n, n-1, \ldots, 3$ do
   a. 选取权值最大的边 $e \in E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2=\{s,t\}$ 对应所求划分，$E_2=\{e\}$ 对应割边

能得到正确答案吗？



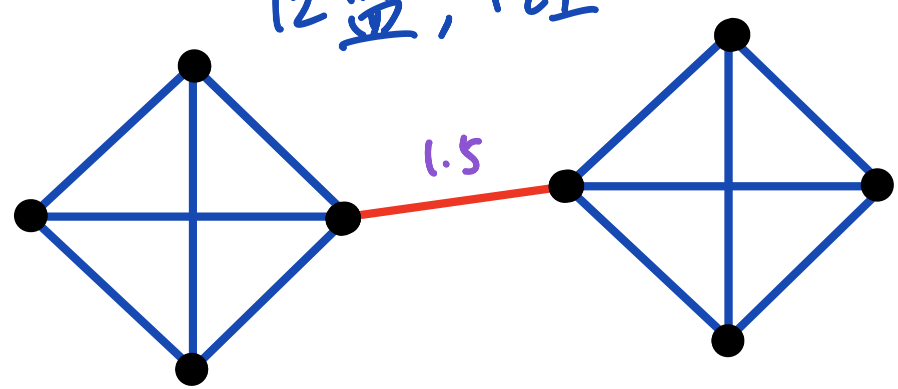
Min-cut = 1.5

思路 2：随机 sample

1. 输入图 $G=(V,E,w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i=n,n-1,\dots,3$ do
   a. 以概率分布 $\frac{\boxed{w(e)}}{\sum_{e\in E_i} w(e)}$ 随机取边 $e \sim E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2=\{s,t\}$ 对应所求划分，$E_2=\{e\}$ 对应割边

12蓝，1红

$\Pr[\quad] = \frac{1.5}{12\times 1 + 1.5}$



$\Pr[\quad] = \frac{12\times 1}{12\times 1 + 1.5}$

分析

1. 输入图 $G = (V, E, w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i = n, n-1, \ldots, 3$ do
   a. 以概率分布 $\frac{w(e)}{\sum_{e \in E_i} w(e)}$ 随机取边 $e \sim E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2 = \{s, t\}$ 对应所求划分，$E_2 = \{e\}$ 对应割边

$= \{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$

固定一个最小割 S。算法返回 S 当且仅当 S 中的边从未被收缩，称为 S 存活

$\le \frac{2}{n}$

第 n 轮 $(i = n)$ 收缩边，S 存活的概率是？

$$\Pr[S \subseteq E_{n-1}] = 1 - \frac{w(S)}{w(E)} \ge 1 - \frac{2}{n}$$

假设第 $n, n-1, \ldots, i+1$ 轮收缩边 S 均存活。那么第 i 轮收缩边，S 存活的概率是？

$S \subseteq E_i$

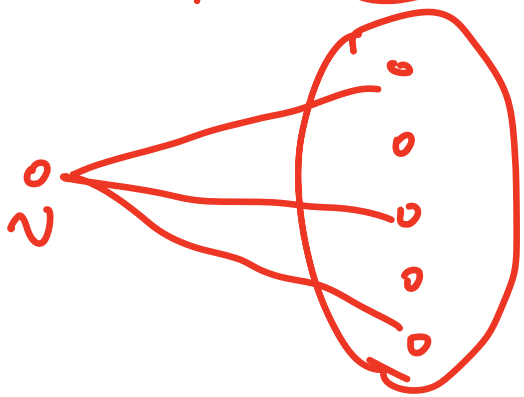
$$\Pr[S \subseteq E_{i-1} \mid S \subseteq E_i] = 1 - \frac{w(S)}{w(E_i)} \ge 1 - \frac{2}{i}$$

分析

引理

$$\boxed{\frac{w(S)}{w(E)} \le \frac{2}{n}}$$

假设 S 是 $G=(V,E)$ 的最小割，则 $w(S) \le \frac{2}{n} w(E)$



$$\forall v, \quad w(S) \le w(v, V\setminus\{v\}) = \sum_{(v,u)\in E} w(v,u)$$

对 v 求和:

$$n \cdot w(S) \le \sum_{v\in V} \sum_{(v,u)\in E} w(v,u) = 2 \cdot w(E)$$

分析

定理

对 G 的任意一个最小割 S，算法返回 S 的概率至少是 $\boxed{\frac{2}{n(n-1)}}$

$$\Pr[S \subseteq E_{n-1}] = 1 - \boxed{\frac{w(S)}{w(E)}} \geq 1 - \frac{2}{n}$$

$$\Pr[S \subseteq E_{i-1} \mid S \subseteq E_i] = 1 - \boxed{\frac{w(S)}{w(E_i)}} \geq 1 - \frac{2}{i}$$

$$\Pr[\text{返回 } S] = \Pr[S \subseteq E_2] = \Pr[S \subseteq E_{n-1}] \cdot \Pr[S \subseteq E_{n-2} \mid S \subseteq E_{n-1}]$$

$$\cdots \Pr[S \subseteq E_2 \mid S \subseteq E_3]$$

$$\geq \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdots \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

推论

若 $|V| = n$，则 G 至多有 $\binom{n}{2}$ 个最小割

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

成功概率

p.　$\frac{1}{p}$

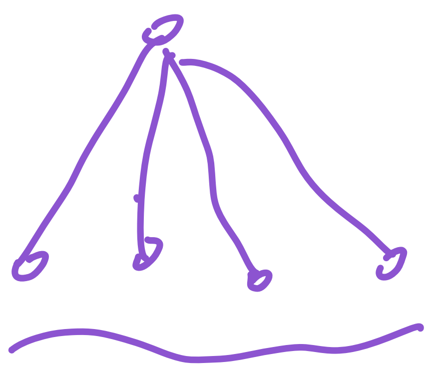
定理

对 G 的任意一个最小割 S，算法返回 S 的概率至少是 $\frac{2}{n(n-1)}$

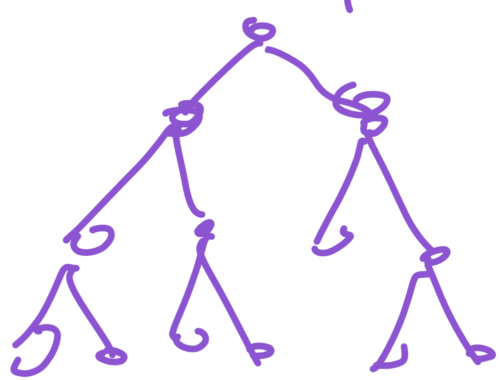
- $O(n^2 \log n)$ 次独立重复试验，以高概率至少成功一次
- 时间复杂度 $O(mn^2 \log n)$
- 能否改进？

$1-\frac{1}{\text{poly}(n)}$

G



G



$n^2 \log n$