线性规划、单纯形法

岳镝

2025 年 3 月 28 日

线性规划的一般形式

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

线性规划的一般形式

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
&\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\
&\qquad x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1}$$

等价地写成矩阵形式

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } \mathbf{c}^\top \mathbf{x}; \\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$.

线性规划的一般形式

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;\\
&\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;\\
&\qquad x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1}$$

等价地写成矩阵形式

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } \mathbf{c}^\top \mathbf{x};\\
&\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$，$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$.

问题：一般的约束条件/目标函数怎样转化成 (1)?

引入松弛变量

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned} \text{maximize} \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m; \\ & x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

对第 i 个约束条件引入松弛变量 x_{n+i}，化成标准形

$$\begin{aligned} \text{maximize} \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \text{s.t.} \ & x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m; \\ & x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \ldots, n+m. \end{aligned}$$

"猜"一个解

假设 $b_i \geq 0$。考虑线性规划标准形

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \text{s.t. } & x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m; \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n+m. \end{aligned}$$

“猜”一个解

假设 $b_i \geq 0$。考虑线性规划标准形

>0 $\to 0$ $x_1, x_2, \cdots x_n = 0$

$$\text{maximize} \sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j;$$

b_i 0

$$\text{s.t. } \boxed{x_{n+i}} + \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n + m.$$

观察 1： $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ 是一个可行解，对应目标值 $y = 0$。

（问题：这是最优解吗？什么情况下是最优解？）

max $-5x_1 - 7x_2 - 10x_3 \leq 0$

$=$

“猜”一个解

假设 $b_i \geq 0$。考虑线性规划标准形

$$\text{maximize} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\text{s.t. } x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n+m.$$

$\binom{n+m}{m}$

max $x_1 + 2x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 + x_4 = 5$

$x_2 = 5 - x_1 - x_4$

$y = x_1 + 2(5 - x_1 - x_4) - x_3$

$= \boxed{10} - x_1 - x_3 - 2x_4$

观察 1：$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ 是一个可行解，对应目标值 $y = 0$。
（问题：这是最优解吗？什么情况下是最优解？）

观察 2：m 个约束方程，$n+m$ 个变量 $\Longrightarrow$ 变量之间可以相互表示，问题的解不变。
希望找到合适的表示，目标函数转化为

maximize $\boxed{v} - \lambda_1 x_{i_1} - \lambda_2 x_{i_2} - \cdots - \lambda_n x_{i_n}$。

单纯形法

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t. } & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30; \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 24; \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 36. \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

$n=3$

$m=3$

单纯形法

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30; \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 24; \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 36. \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

化成标准形

Initial

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$= (0\ \ 0\ \ 0\ \ 30\ \ 24\ \ 36)$

non-basic variable

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.}\quad & \boxed{x_4} = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\
& x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\
& x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \\
& x_j \ge 0, 1 \le j \le 6.
\end{aligned}
$$

basic variable

$30 - x_1 \ge 0$

$x_1 \le 30$

$x_1 \le 12$

$\boxed{x_1 \le 9}$

单纯形法

$$\max \; y = 27 + \frac{1}{4}\boxed{x_2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_6$$

$$x_4 = 21 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_6 \qquad x_2 \le 28$$

$$x_5 = 6 - \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 + \frac{1}{2}x_6 \qquad \boxed{x_2 \le 4}$$

$$x_1 = 9 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_6 \qquad x_2 \le 36$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (9 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 21 \;\; 6 \;\; 0)$$

$$y = 27$$

$$\max \; 28 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_6 \le 28$$

$$x_4 = 18 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$$x_2 = 4 - \frac{8}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6$$

$$x_1 = 8 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 18 \;\; 0 \;\; 0)$$

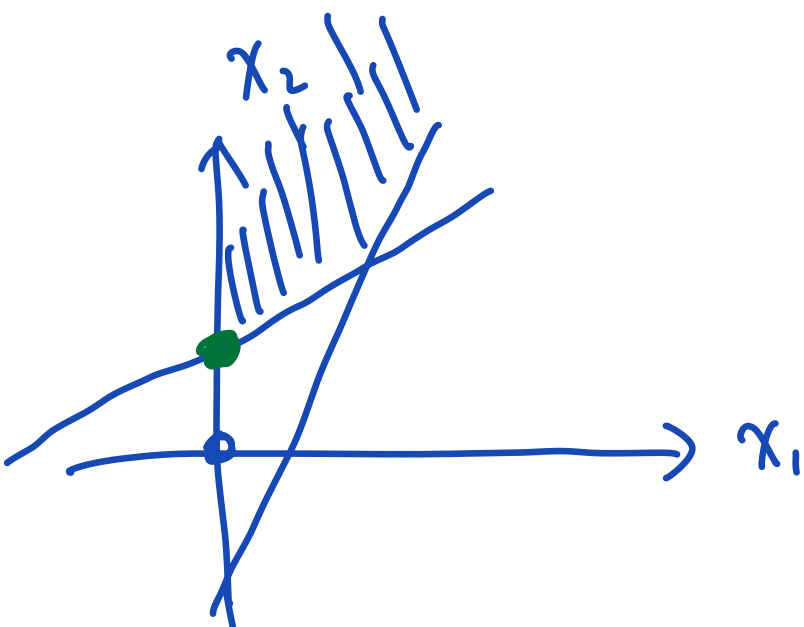
$$y = 28$$

找不到初始可行解？

回忆：我们假设 $\boxed{b_i \geq 0,}$ $\forall i$。当存在某个 $\boxed{b_i < 0}$ 时，我们的办法找不到初始可行解。甚至问题本身可能不存在可行解。

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& \boxed{x_1 - 5x_2 \leq -4} \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$x_1 \quad x_2 = 0$



判断是否存在可行解

原问题 $\mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
\cancel{\text{maximize } 4x_1 - x_2} \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& x_1 - 5x_2 \le -4 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

辅助问题 $\boxed{\mathcal{P}_{\text{aux}}}$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & \boxed{-x_0} \quad \le 0 \\
\text{s.t.} \quad & -x_0 + 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& -x_0 + x_1 - 5x_2 \le -4 \\
& x_0, x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

$x_1 = x_2 = 0$

$x_0 = 4$

命题：$\mathcal{P}$ 存在可行解 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}_{\text{aux}}$ 的最优值为 0.

$$\max \ -x_0$$

$$x_3 = 2 + x_0 - 2x_1 + x_2 \qquad x_0 \geq -2$$

$$x_4 = -4 + x_0 - x_1 + 5x_2 \qquad \boxed{x_0 \geq 4}$$

$$\max \ -4 - x_1 + 5x_2 - x_4$$

$$x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4 \qquad x_2 \leq \frac{3}{2}$$

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4 \qquad \boxed{x_2 \leq \frac{4}{5}}$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$(4 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 0)$$

$$y_{aux} = -4$$

$$\max \ \boxed{-x_0}$$

$$x_3 = \frac{14}{5} + \frac{4}{5}x_0 - \frac{9}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4$$

$$x_2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_0 + \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4$$

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3, x_4)$$

$$(0 \quad 0 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{14}{5} \quad 0)$$

$$y_{aux} = 0$$

$$\max \ -\frac{4}{5} + \frac{19}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_4$$

$$x_3 = \frac{14}{5} - \frac{9}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4$$

$$x_2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4$$

总结

$$\begin{cases} \forall b_i \geq 0 \Rightarrow \text{找到初始可行解} \Rightarrow \text{单纯形} \begin{cases} \text{存在最优值} \\ \text{不存在最优值（无界）} \end{cases} \\ \exists b_i < 0 \Rightarrow \text{构造辅助问题} \Rightarrow \begin{cases} \text{不存在可行解} \\ \text{存在并找到一个初始可行解} \Rightarrow \text{单纯形} \end{cases} \end{cases}$$