递推方程

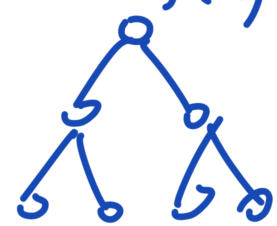
岳镝

2025 年 2 月 28 日

递推方程的求解方法

- 迭代法
  - 直接迭代：$T(n) \leftarrow T(n-1)$
  - 换元迭代：$T(n) \leftarrow T(n/b)$
  - 差消迭代：$T(n) \leftarrow \sum_{i<n} T(i)$
- 递归树
- 尝试法：用于分析，需要归纳证明
- 主定理：$T(n) = aT(n/b) + \boxed{f(n)}$

$f(n)$



主定理

设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数，$f(n)$ 为函数，$T(n)$ 为非负整数，且

$$T(n) = \underline{aT(n/b)} + \underline{f(n)}$$

$f(n) \sim n^{\log_b a}$

则

(1) 若 $f(n) = O(n^{\log_b a \boxed{-\varepsilon}}), \varepsilon > 0$，则 $\boxed{T(n)} = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

主定理

设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数，$f(n)$ 为函数，$T(n)$ 为非负整数，且

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$g(x) = x^3 + x^2$

则

(1) 若 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

- 直觉：$T_1(n) = aT_1(n/b)$，$T_2(n) = f(n)$，比较谁（在多项式意义下）dominate
- 主定理失效：sub-polynomial 意义下 dominate。例子：$T(n) = 2T(n/2) + n \log n$
- 怎么理解情形 (3)?

主定理失效

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a}\cdot\left(\log\frac{n}{b^i}\right)^k \qquad \frac{n}{b^i} = b^{l-i}$$

$$= \frac{n^{\log_b a}}{a^i}\cdot\left((l-i)\log b\right)^k$$

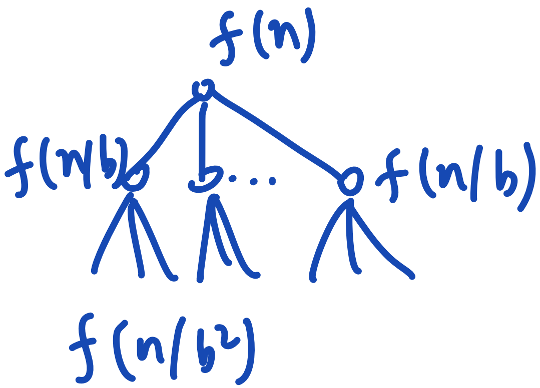
一般结果

$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log^k n)$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log^{k+1} n)$。 $\boxed{n=b^l}$

$T(n) = aT(n/b)+f(n)$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{l} a^i\cdot f\left(\frac{n}{b^i}\right) \qquad l=\log_b n$$



$\to f(n)$

$\to af\left(\frac{n}{b}\right)$

$\to a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$

$$(\log b)^k n^{\log_b a}\cdot\sum_{i=0}^{l}(l-i)^k$$

$$= (\log b)^k\cdot n^{\log_b a}\cdot\boxed{\sum_{i=0}^{l} i^k}$$

$$l^{k+1}$$

$$= \left(\frac{\log n}{\log b}\right)^{k+1}$$

$k\geq 0$

$k\leq -2$

$T(n) = n^{\log_b a}$

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{i} = \log l$$

$$n^{\log_b a}\cdot(\log n)^{k+1}$$

情形 (3)?

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

- 若 $\boxed{f(n)} = \Omega(n^{\log_b a + \boxed{\varepsilon}})$, $\varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

$c \in (0,1)$

$** \Rightarrow **$ 1

$** \Rightarrow **$ 4 ✓

无 0

$\downarrow$

$n^{\log_b a + \varepsilon}$

$\boxed{f(n)} \geq \frac{a}{c} f\left(\frac{n}{b}\right)$

$\geq \frac{a^2}{c^2} f\left(\frac{n}{b^2}\right)$

$\geq \cdots$ $\quad f(1)$

$\geq \left(\frac{a}{c}\right)^{\log_b n} \cdot \Theta(1)$

$c \in (0,1)$ $\quad \frac{1}{c} > 1$

$\varepsilon = \log_b \frac{1}{c} > 0$

$= n^{\log_b \frac{a}{c}} = n^{\log_b a + \log_b \frac{1}{c}}$

情形 (3)?

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

- 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \le cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

$f(n) = n^{\log_b a} \cdot g(n)$

$g(n) = \boxed{\Omega(n^{\varepsilon})}$.

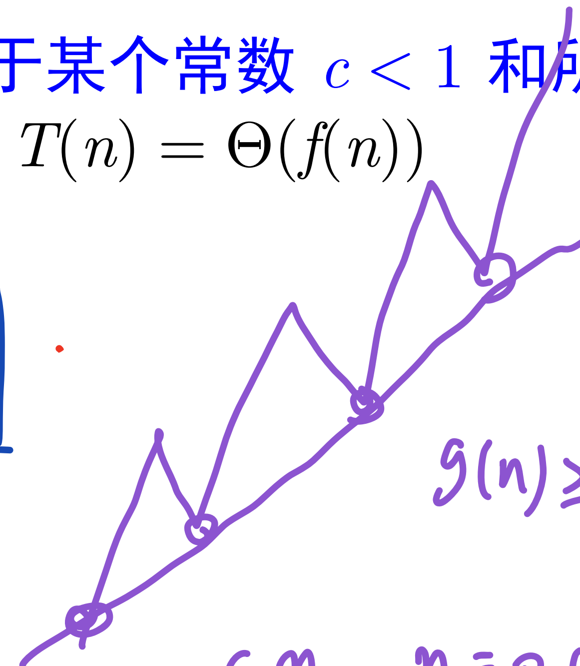
for some $\varepsilon > 0$

$f(\frac{n}{b}) = (\frac{n}{b})^{\log_b a} \cdot g(\frac{n}{b})$

$= \frac{n^{\log_b a}}{a} \cdot g(\frac{n}{b})$

$\cancel{a} \cdot \frac{\cancel{n^{\log_b a}}}{\cancel{a}} \cdot g(\frac{n}{b}) \le c \cdot \cancel{n^{\log_b a}} \cdot g(n)$

$\boxed{g(\frac{n}{b}) \le c \cdot g(n)}$ for some $\boxed{c \in (0,1)}$



$g(n) \ge n$

$$g(n) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod b \\ 2bn, & n \not\equiv 0 \pmod b \end{cases}$$

$n = b(bm+1) \quad m \in \mathbb{Z}_+$

$g(n) = n = b(bm+1)$

$g(\frac{n}{b}) = g(bm+1) = 2b(bm+1)$